Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2023-2024 учебном году
11 класс
Заключительный этап. Вариант 1.

Задача 1. (20 баллов). Автомобиль УАЗ-452 «Буханка» при эвакуации раненого бойца с поля боя разогнался по заснеженной дороге, буксуя всеми четырьмя колесами, до скорости V = 36 км/ч, при этом проехал путь S = 63 м. Далее автомобиль ехал с постоянной скоростью под непрерывным обстрелом противника, в результате которого были повреждены тормоза задних колес. Найти тормозной путь $S_т$ «Буханки» при торможении юзом (с полностью заблокированными передними колесами). Колесная база (расстояние между осями) УАЗ-452 – 2,3 м, центр масс расположен на равном удалении от осей на высоте h = 1 м, коэффициент трения колес с поверхностью заснеженной дороги μ = 0,08.

Решение:

Применяя кинематическое уравнение для перемещения S при разгоне в проекции на горизонтальную ось, получим

$$S = \frac{V^2}{(2a)}. \qquad (1.1)$$

Для искомой величины $S_т$ можно написать аналогичное соотношение:

$$S_т = \frac{V^2}{(2a_т)}. \qquad (1.2)$$

Для случая разгона всеми колесами из второго закона Ньютона получим:

$$ma = F_1 + F_2. \qquad (1.3)$$

Кроме того, так как колеса буксуют, то на них действует сила трения скольжения:

$$F_1 = \mu N_1;\ F_2 = \mu N_2, \qquad (1.4)$$

а из второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось следует, что

$$N_1 + N_2 = mg. \qquad (1.5)$$

Поэтому получается $a = \mu g$, и после подстановки:

$$S = \frac{V^2}{(2\mu g)}. \qquad (1.6)$$

При торможении только передними колесами $F_2 = 0$, поэтому будем иметь

$$ma_т = F_1 = \mu N_1. \qquad (1.7)$$

Для нахождения N_1, помимо соотношения $N_1 + N_2 = mg$, следует учесть также равенство нулю суммы моментов относительно центра масс всех сил, приложенных к автомобилю:

$$\frac{l(N_1 - N_2)}{2} - \mu N_1 h = 0. \tag{1.8}$$

Выполнение этого условия обеспечивает поступательное движение автомобиля в инерциальной системе отсчета. Из последней пары уравнений получаем:

$$N_1 = \frac{mg}{2\left(1 - \mu \frac{h}{l}\right)} = 0. \tag{1.9}$$

и после подстановки

$$a_т = \frac{\mu mg}{2\left(1 - \mu \frac{h}{l}\right)}, \tag{1.10}$$

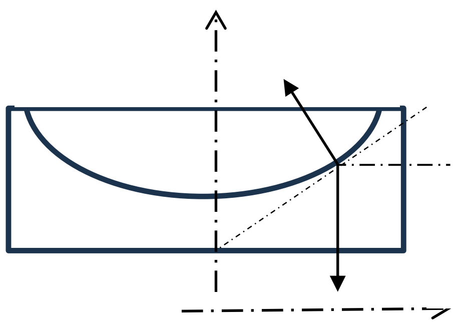
$$S_т = 2S\left(1 - \mu \frac{h}{l}\right). \tag{1.11}$$

Ответ: $S_т = 2S\left(1 - \mu \frac{h}{l}\right) = 122$ м.

Задача 2. (20 баллов). На внутреннюю поверхность массивной чаши небольшой глубины H кладут маленький шарик массы m и отпускают его. За какое время шарик достигнет дна чаши, если поверхность гладкая и имеет параболическую форму $y = ax^2$, где a – некоторая постоянная? Ускорение свободного падения g.

Решение:

После того, как шарик отпустят, он будет совершать колебания относительно дна чаши, опускаясь и поднимаясь. При небольшой высоте подъема скорость шарика будет невелика и нормальным ускорением можно пренебречь. Тогда для небольших углов φ проекция силы реакции опоры на горизонтальную ось



$$N_x = -mg\cos\varphi\sin\varphi \cong -mg\tan\varphi = -mg2ax. \tag{2.1}$$

Здесь $\tan\varphi$ найден через производную y по x.

Следовательно, проекцию силы на ось OX, действующей на шарик, можно записать, как $F_x = -kx$, где $k = 2mga$.

Таким же образом зависит от x сила в пружинном маятнике, где k – коэффициент жесткости пружины (груз на абсолютно гладкой поверхности, присоединенный к стене пружиной).

Период колебания пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{2.2}$$

Таким образом, период колебаний шарика будет равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2ga}}. \tag{2.3}$$

Время движения шарика между верхней и нижней точками траектории равно четверти периода

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{1}{8ga}}. \tag{2.4}$$

К решению задачи можно подойти другим путем. Потенциальная энергия шарика равна $U = mgy = mgax^2$, а кинетическая - $\frac{mv^2}{2}$, где v – его скорость.

Запишем закон сохранения энергии:

$$mgax^2 + \frac{mv^2}{2} = mgH \tag{2.5}$$

Для небольшой глубины чаши квадратом вертикальной составляющей скорости по сравнению с квадратом горизонтальной можно пренебречь. Скорость равна производной по времени.

Тогда $2gax^2 + x'^2 = 2gH$.

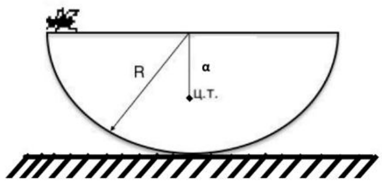
Дифференцируя по времени, получаем: $\omega^2 x + x'' = 0$, где $\omega^2 x = 2ga$.

Решение этого уравнения – это гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2ga}}$. Искомое время равно четверти периода $\tau = \pi\sqrt{\frac{1}{8ga}}$.

Мы пренебрегли трением и энергией вращения шарика, так как он по условию мал, а при отсутствии трения вращаться не будет.

<u>Ответ:</u> $\tau = \pi\sqrt{\frac{1}{8ga}}$.

Задача 3. (20 баллов). Пчёлка Майя, после долгого перелёта, села на край полусферы радиуса R и массы M, которая покоится на горизонтальной плоскости. Масса пчёлки m. Определить высоту, на которую опустится край полусферы? Считать полусферу тонкостенной. Центр тяжести полусферы расположен на расстоянии a=R/2 от ее центра.



Решение:

Под действием веса пчёлки сфера займет наклонное положение, изображенное на рисунке, где через $\vec{N}$ обозначена сила реакции стола. Уравнение моментов, записанное относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку касания полусферы и стола, имеет вид:

$$Mga \sin\alpha = mgR \cos\alpha, \tag{3.1}$$

где α — угол, на который отклонится полусфера. Отсюда

$$tg\ \alpha = \frac{mR}{Ma} = 2\frac{m}{M}\,. \tag{3.2}$$

Из рисунка видно, что искомая величина $h = R\sin\alpha,$ тогда

$$h = R\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{1+\left(\frac{M}{2m}\right)^2}}\,. \tag{3.3}$$

<u>Ответ:</u> $h = \frac{R}{\sqrt{1+\left(\frac{M}{2m}\right)^2}}\,.$

Задача 4. (20 баллов). Металлическое кольцо массой m, сопротивлением R и площадью S, движущееся горизонтально, попадает в область линейно растущего магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца. Индукция магнитного поля увеличивается от нуля до B на расстоянии l. Как изменится скорость кольца Δv, если оно не вращается? Считать размер кольца много меньшим l, а Δv много меньшим начальной скорости.

Решение:

Введем горизонтальную ось координат $\boldsymbol{X}$.

По условию

$$B(x) = \frac{B}{l}x. \tag{4.1}$$

Время движения кольца, при условии $\boldsymbol{\Delta v} \ll \boldsymbol{v}$,

$$t = \frac{l}{v}. \tag{4.2}$$

ЭДС индукции, учитывая то, что размер кольца много меньше l, равна

$$|\varepsilon| = \frac{SBv}{l}. \tag{4.3}$$

По закону сохранения энергии изменение кинетической энергии $\Delta \boldsymbol{W}$ равно количеству теплоты, выделившемуся в кольце:

$$\frac{\varepsilon^2}{R}t = |\Delta W|. \tag{4.4}$$

Изменение кинетической энергии, при условии $\boldsymbol{\Delta v} \ll \boldsymbol{v}$, равно:

$$|\Delta W| = mv\Delta v. \tag{4.5}$$

Подставим (4.4) и (4.3) в (4.5) и получим ответ:

$$\frac{\varepsilon^2}{R}t = mv\Delta v, \Delta v = \frac{S^2B^2}{Rml}. \tag{4.6}$$

Ответ: $\Delta v = \frac{S^2B^2}{Rml}$.

Задача 5. (20 баллов). Беспилотный летательный аппарат, воздушный винт которого приводится во вращение поршневым двигателем, перемещается прямолинейно на постоянной высоте с постоянной по модулю скоростью V_1. Для совершения горизонтального поворота на угол φ был включен реактивный двигатель, струя продуктов горения топлива которого имела постоянную относительно аппарата скорость V_2, направленную все время перпендикулярно к V_1. Какую работу A совершил реактивный двигатель за время поворота? В момент начала поворота полная масса аппарата равна m_0. Расходом топлива поршневого двигателя пренебречь. Коэффициент полезного действия реактивного двигателя считать равным 1.

Решение:

За малый промежуток времени, в течение которого направление струи относительно Земли можно считать неизменным, приращение импульса системы равно нулю:

$$(m + dm)(V_1 + dV_1) + dm_г V_г - mV_1 = 0, \tag{5.1}$$

где m – масса летательного аппарата, dm – ее приращение; $dm_г$ – масса порции выброшенных газов (при этом $dm_г = -dm$); dV_1 – приращение вектора скорости летательного аппарата, $V_г$ – скорость струи в системе отсчета, связанной с Землей.

Заменив $dm_г$ на $(-dm)$ и пренебрегая малой величиной $dmdV_1$, получим:

$$mdV_1 + dmV_1 - dmV_г = 0, \tag{5.2}$$

$$mdV_1 = dm(V_г - V_1), \tag{5.3}$$

$$mdV_1 = dmV_2, \tag{5.4}$$

где $V_2 = (V_г - V_1)$ – относительная скорость струи.

Векторы dV_1 и V_2 направлены противоположно, поэтому:

$$m|dV_1| = -dmV_2. \tag{5.5}$$

С учетом того, что длина вектора V_1 остается неизменной, и модуль его приращения равен $|dV_1| = V_1 d\varphi$, где $d\varphi$ – угол поворота вектора V_1, имеем:

$$mV_1 d\varphi = -dmV_2. \tag{5.6}$$

Отсюда угол поворота φ равен:

$$\varphi = \left(\frac{V_2}{V_1}\right) \ln\left(\frac{m_{нач}}{m_{кон}}\right) = \left(\frac{V_2}{V_1}\right) \ln\left(\frac{m_0}{(m_0 - m_г)}\right), \tag{5.7}$$

где $m_{нач}$ и $m_{кон}$ – масса летательного аппарата до и после совершения маневра соответственно, $m_г$ – масса выброшенных газов.

Из уравнения (5.7) найдем массу выброшенных газов:

$$m_г = m_0 \left(1 - e^{\left(\frac{-\varphi V_1}{V_2}\right)}\right). \tag{5.8}$$

Работа реактивного двигателя равна кинетической энергии выброшенных газов в системе отсчета, связанной с летательным аппаратом:

$$A = \frac{m_г V_2^2}{2} = \frac{m_0 \left(1 - e^{\left(\frac{-\varphi V_1}{V_2}\right)}\right) V_2^2}{2}. \tag{5.9}$$

Ответ: $A = \frac{m_г V_2^2}{2} = \frac{m_0 \left(1 - e^{\left(\frac{-\varphi V_1}{V_2}\right)}\right) V_2^2}{2}$.

РЕШЕНИЕ

жюри Межрегиональной олимпиады школьников
на базе ведомственных образовательных организаций по физике
в 2023-2024 учебном году

Каждая задача очного этапа олимпиады оценивалась по системе: указанной в таблицах. Для каждой параллели классов (8-9, 10 и 11) разработана своя система баллов и критерии определения призёров (1, 2 и 3 место), принятая на заседании жюри олимпиады.

Критерии определения призёров (по сумме набранных баллов):

11 класс

за I место – от 88 до 100 баллов;
за II место – от 70 до 87 баллов;
за III место – от 60 до 69 баллов.

Система оценки задач
для 10 и 11 классов (максимальное количество баллов - 100):

№ задачи	1	2	3	4	5
Ответ верный, решение является верным и полным;	20	20	20	20	20
Ответ верный, решение является верным, получен правильный ответ, возможны небольшие недочеты (не полный в рисунок, не написаны законы в векторной форме и т.д.)	17-19	17-19	17-19	17-19	17-19
Ответ верный, решение в общем верное, получен правильный ответ, но есть существенные недочеты (отсутствие рисунка, использование соотношений, не являющихся физическими законами, не учтены и не рассмотрены все возможные случаи, использованные соотношения и формулы недостаточно обоснованы и т.д.)	11-16	11-16	11-16	11-16	11-16
Ответ неверный, но составлена правильная система уравнений и соотношений с использованием необходимых физических законов, но решение не доведено до конца или в нем имеются ошибки на стадии математических преобразований	2-10	2-10	2-10	2-10	2-10
Ответ неверный, обнаружены существенные пробелы в теоретических знаниях, законах физики, которые не позволили решить задачу	0-1	0-1	0-1	0-1	0-1